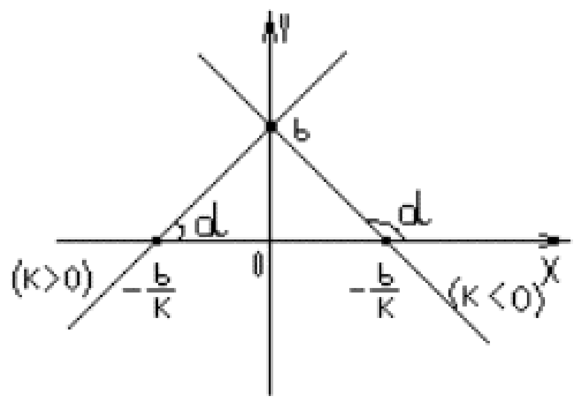
Министерство просвещения Российской Федерации
Администрация города Иркутска
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
города Иркутска средняя общеобразовательная школа № 76
имени Гвардейской Иркутско-Пинской дивизии
(МБОУ г. Иркутска СОШ №76)
664081, г. Иркутск, ул. Иркутской 30 Дивизии, 24
тел. /факс:27-88-37, E-mail: school_76@bk.ru
ОКПО 49422706, ОГРН 1023801544854, ИНН/КПП
3811056063/381101001

Составитель: учитель математики Залуцкая С.А.

Функции. Теория и примеры.

Подготовка к ОГЭ



СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Функция – одно из важнейших математических понятий. Функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Способы задания функции:

1) аналитический способ (функция задается с помощью математической формулы);

2) табличный способ (функция задается с помощью таблицы);

3) описательный способ (функция задается словесным описанием);

4) графический способ (функция задается с помощью графика). Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значению аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Линейная функция

Свойства и график линейной функции

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, заданная на множестве всех действительных чисел. Здесь k – угловой коэффициент, b – свободный член.

Если $k > 0$, то угол между прямой и осью OX-острый, если $k < 0$, то угол тупой. Угловой коэффициент k можно найти по формуле $k = tg\alpha$, где α- это градусная мера угла пересечения прямой с осью OX

Если $b > 0$ то точка пересечения прямой с осью ОУ выше 0, а если $b < 0$ то ниже 0.

Свойства:
1. $D(y) = R$.

2. $E(y) = R$.

3. Функция ни четная, ни нечетная.

4. $y = 0$ при $x = -\frac{b}{x}$ (нули функции).

5. Промежутки знакопостоянства:
    1. если $k > 0$, $y < 0$ при $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$; $y > 0$ при $x \in (-\frac{b}{k}; +\infty)$;
    2. если $k < 0$, $y < 0$ при $x \in (-\frac{b}{k}; +\infty)$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -\frac{b}{k})$.

6. Функция возрастает при $k > 0$ и убывает при $k < 0$ на R.
7. Функция неограниченна, непрерывна.

Рассмотрим частные случаи линейной функции:

1) Если $k = 0$, получим постоянную функцию $y = b$, график которой есть прямая, параллельная оси Ох, проходящая через точку с координатами $(0; b)$.

Рассмотрим ее свойства:

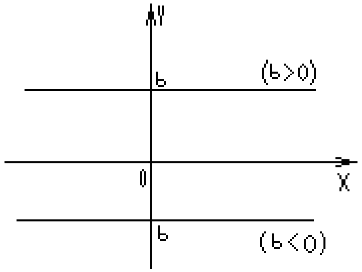
1. $D(y) = R$.

2. $E(y) = R$
3. Функция четная.
4. $y \neq 0$.
5. Промежутки знакопостоянства:
    1. если $b > 0$, $y > 0$;
    2. если $b < 0$, $y < 0$.

6. Функция постоянна на R.

7. Функция непрерывна. Графиком функции является прямая,

параллельная оси OX.



2) Если $b = 0$, то получим функцию $y = kx$, которая проходит через начало координат $(0; 0)$

Свойства:

1.$D(y) = R$.

2. $E(y) = R$.

3. Функция нечетная,

4. $y = 0$ при $x = 0$.

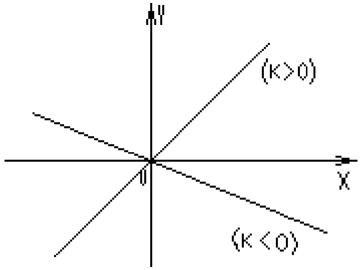
5. Промежутки знакопостоянства:

    1. если $k > 0$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$; $y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$;

    2. если $k < 0$, $y < 0$ при $x \in (0; +\infty)$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.

6. Функция возрастает при $k > 0$ и убывает при $k < 0$ на R.

7. Функция неограниченна, непрерывна. Графиком функции является прямая, проходящая через начало координат.

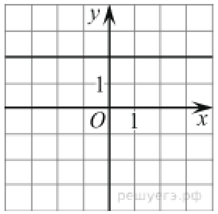


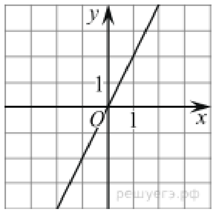
Линейная функция в задачах ОГЭ

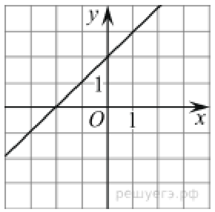
Линейная функция чаще используется в задании №11, иногда встречается и в №22

Примеры линейной функции в №11:

№1) Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

А) 

Б) 

В) 

1) $y = 2x$

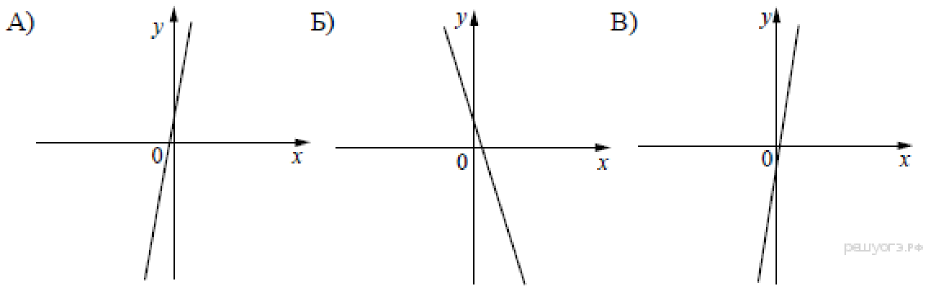
2) $y = -2x$

3) $y = x + 2$

4) $y = 2$

№2) На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b.

Графики



Коэффициенты

1) $k < 0, b > 0$ 2) $k > 0, b > 0$ 3) $k < 0, b < 0$ 4) $k > 0, b < 0$

Квадратичная функция

Свойства и график квадратичной функции

Квадратичной (квадратной) функцией называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – числа и $a \neq 0$. Ее графиком является парабола. Если коэффициент $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ - вниз.

Для построения графика квадратичной функции находят координаты нескольких точек соответствующей параболы:

1) абсциссу вершины параболы по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а ординату по формуле $y = y(x_0\ )$

2) нули функции - точку пересечения параболы с осью OY – точку $(0; c)$; и с осью OX, которая находится через дискриминант $(x_1; 0)(x_2; 0)$.

3) дополнительные точки, если необходимо.

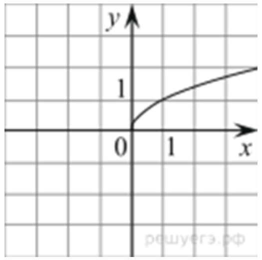
Рассмотрим простейший случай квадратичной зависимости - симметричная парабола с вершиной в начале координат заданная формулой $y = ax^2$:

1. если $a > 1$, то растяжение вдоль оси OY в а раз;
2. если $0 < a < 1$, то сжатие вдоль оси OY в $\frac{1}{a}$ раз;
3. если $a < 0$, то симметрично относительно оси OX.

Графиком функции $y = ax^2 + n$ является парабола, которая может быть получена из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси OY на $|n|$ единиц вверх, если $n > 0$; или на n единиц вниз, если $n < 0$.

Графиком функции $y = a(x - m)^2$ является парабола, которая может быть получена в результате параллельного переноса графика функции $y = ax^2$вдоль оси OX на $|m|$ единиц вправо, если $m > 0$; или на $|m|$ единиц влево, если $m < 0$.

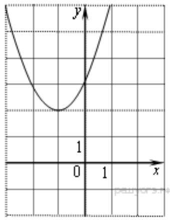
Существует разновидность параболы функция $y = \sqrt{x}$ —это ветвь параболы направленная в право.



Квадратичная функция в задачах ОГЭ

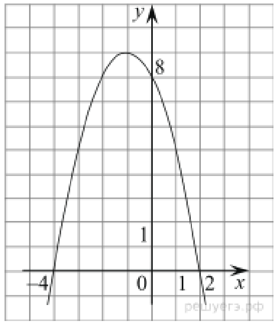
Квадратичная функция наиболее часто встречается в заданиях ОГЭ, как в №11, так и в №22.

№1) Найдите значение а по графику функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенному на рисунке.



1) -1 2) 1 3) 2 4) 3

№2) На рисунке изображён график квадратичной функции $y = f(x)$.



Какие из следующих утверждений о данной функции неверны? Запишите их номера в порядке возрастания.

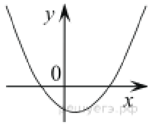
1) Функция возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$.

2) Наибольшее значение функции равно 8.

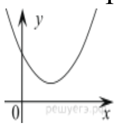
3) $f(-4) \neq f(2)$.

№3) На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого графика укажите соответствующее ему значения коэффициента a и дискриминанта D.

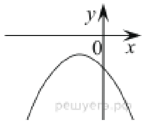
Графики



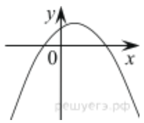
А)



Б)



В)



Г)

Знаки чисел

1)$a > 0, D > 0$ 2)$a > 0, D < 0$ 3)$a < 0, D > 0$ 4)$a < 0, D < 0$

№4) Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра с прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

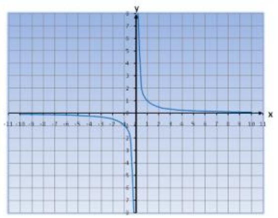
№5) Известно, что парабола проходит через точку $B(-1;-\frac{1}{4})$ и её вершина находится в начале координат. Найдите уравнение этой параболы и вычислите, в каких точках она пересекает прямую
$y = -16$.
6) При каких значениях р вершины парабол $y = -x^2 + 2xp + 3$ и $y = x^2 - 6xp + p$ расположены по разные стороны от оси ОХ?

Функция обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x} + b$

Свойства и график функции обратная пропорциональность

Эта функция по виду напоминает функцию прямой, за тем исключением, что x находится в знаменателе. Это как раз и является ее отличительной особенностью.

Графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ является кривая, состоящая из 2-х ветвей, симметричных относительно начала координат, где $k \neq 0$ - коэффициент обратной пропорциональности. Такая кривая называется гиперболой.



Свойства:

1. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3. Нечетная.

4. Промежутки знакопостоянства:

если $k > 0$, то $y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$;

$y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$;

если $k < 0$, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$;

$y < 0$ при $x \in (0; +\infty)$.

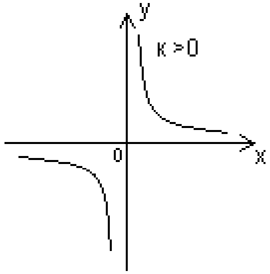
5. Монотонность:

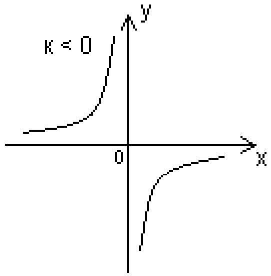
при $k < 0$ функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

при $k > 0$ функция убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

Бывают и исключения:

1. если $k > 0$ то функция расположена в 1 и 3 четвертях;
2. если $K < 0$ то функция расположена во 2 и 4 четвертях.

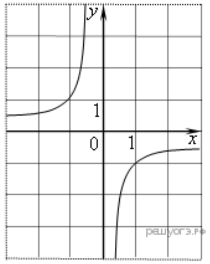




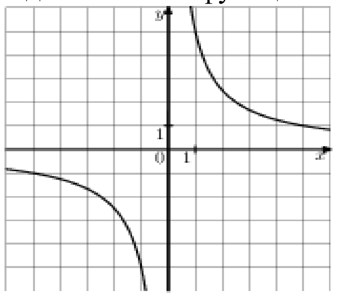
Функция обратная пропорциональность в задачах ОГЭ:

№11)

1)Найдите значение k по графику функции$y = \frac{k}{x}$, изображенному на рисунке.



2) График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y = -\frac{5}{x}$ 2) $y = -\frac{1}{5x}$ 3) $y = \frac{5}{x}$ 4) $y = \frac{1}{5x}$

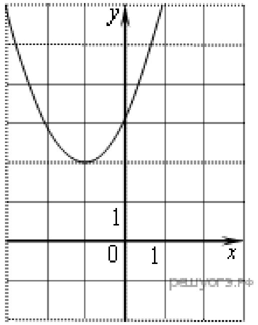
№22)

№1) Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Примеры решения задач

№11)

№1) Найдите значение а по графику функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенному на рисунке



1) -1 2) 1 3) 2 4) 3

Решение:

Т.к. ветви параболы направлены вверх, значит $a > 0$.

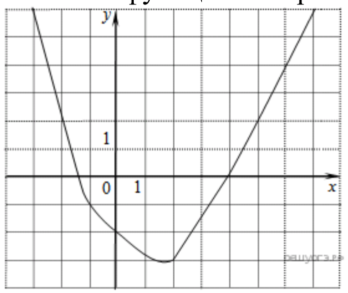
Абсцисса вершины параболы равна -1, поэтому $-\frac{b}{2a} = -1$, откуда $b = 2a$. Парабола пересекает ось ординат в точке с ординатой 3, поэтому $c = 3$. Тем самым, уравнение параболы принимает вид $y = ax^2 + 2ax + 3$. Поскольку парабола проходит через точку $(-1; 2)$, имеем:

$$2 = a \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + 3 \Leftrightarrow 2 = -a + 3 \Leftrightarrow a = 1$$

Правильный ответ указан под номером 2.

Ответ:2

№2) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Какие из утверждений относительно этой функции неверны? Укажите их номера.

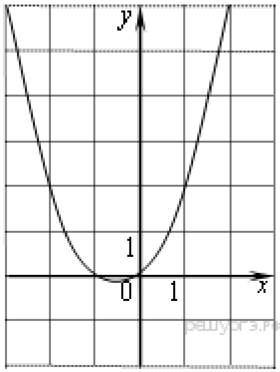


1) функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$
2) $f(3) > f(-3)$
3) $f(0) = -2$
4) прямая $y = 2$ пересекает график в точках $(-2; 2)$ и $(5; 2)$

Решение:

1) данное утверждение неверно т.к. данная функция возрастает на промежутке $[2; +\infty)$
2)неверно, т.к. $f(3) = -1{,}5, f(-3) = 6$.
3)верно
4)верно
Ответ:12

№3) График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y = x^2 - x$ 2)$y = -x^2 - x$ 3)$y = x^2 + x$ 4)$y = -x^2 + x$

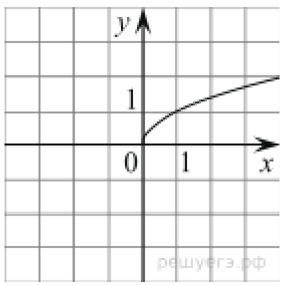
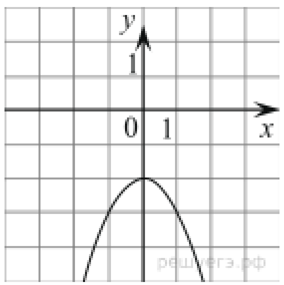
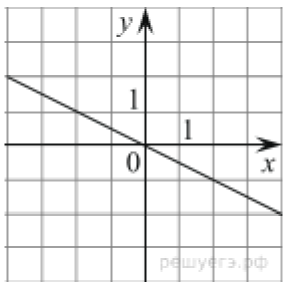
Решение:

Ветви изображённой на рисунке параболы направленны вверх, а абсцисса вершины отрицательна. Следовательно, данному графику могут соответствовать функции $y = x^2 - x$ или $y = x^2 + x$. И т.к. парабола сдвинута вправо от начала координат, тогда подойдет функция $y = x^2 + x$

Ответ:3

№4) Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

Графики

А)	Б)	В)
		

Формулы

1)$y = -\frac{1}{2}x$ 2)$y = -\frac{1}{x}$ 3)$y = -x^2 - 2$ 4)$y = \sqrt{x}$

Решение:

1) $y = -\frac{1}{2}x -$ уравнение прямой (В)

2) $y = -\frac{1}{x} -$ гипербола

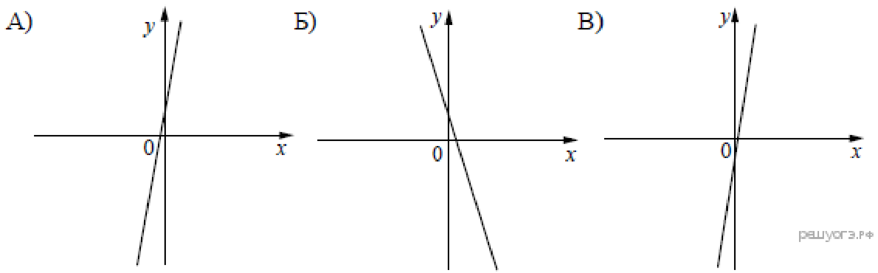
3) $y = -x^2 - 2 -$ парабола, ветви которой направлены вниз(Б)

4) $y = \sqrt{x}$ –парабола, ветви которой направлены вправо(А)

Ответ:431

№5) На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b.

Графики



Коэффициенты

1)$k < 0, b > 0$ 2)$k > 0, b > 0$ 3)$k < 0, b < 0$ 4)$k > 0, b < 0$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

Решение:

Если прямая задана уравнением $y = kx + b$, то при $k > 0$ функция возрастает, при $k < 0$— убывает. Значению b соответствует значение функции в точке $x = 0$. Таким образом, графику А соответствуют коэффициенты 2, Б − 1, В − 4.

Ответ:214

№22)

№1) Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра с прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение:

1)Найдем корни биквадратного уравнения:

$x^2 = t \Longrightarrow y = t^2 - 13t + 36$

$t = 9, t = 4 \Longrightarrow x = \pm 3, x = \pm 2$

2)Разложим квадратный трехчлен на множители:

$$y = \frac{(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = (x+3)(x-2)$$

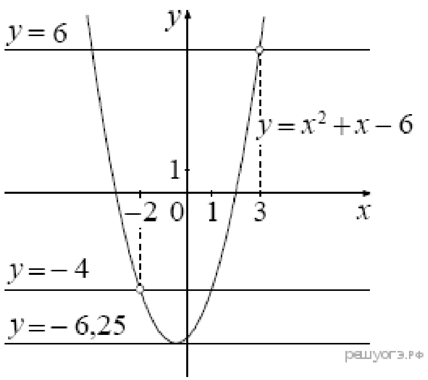
ОДЗ: $x \neq 3,\ x \neq -2$

3)После раскрытия скобок получим уравнение $y = x^2 + x - 6$

4)Построим параболу, используя алгоритм построения графика квадратичной функции:

Вершина параболы $(-0{,}5; -6{,}25)$

Точки пересечения с осями $(0; -6), (-3; 0), (2; 0)$.



5)Функция $y = c -$ это прямая параллельная оси абсцисс.

Прямая будет иметь с параболой только одну общую точку если она проходит через ее вершину или через одну из выколотых точек, следовательно $c = -6{,}25, c = -4, c = 6$.

Ответ: $c = -6{,}25, c = -4, c = 6$.

№2) Постройте график функции $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 4, \text{если } x < -1 \\ 1 - |x - 1|, \text{если } x \geq -1 \end{cases}$ и определите, при каких значениях параметра а он имеет ровно две общие точки с прямой $y = a$.

Решение:

1) Построим график квадратичной функции $y = -x^2 - 4x - 4$ на промежутке $x < -1$

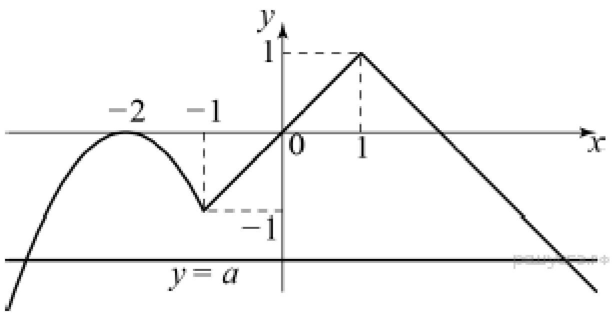
$y = -x^2 - 4x - 4 \Rightarrow y = -(x + 2)^2 -$ парабола ветви которой направлены вниз и сдвинутая на 2 единичных отрезка влево

2) Построим график функции $y = 1 - |x - 1|$ на промежутке $x \geq -1$

Раскроем модуль и преобразуем:

$$y = 1 - |x - 1| = \begin{cases} 1 - x + 1, & x - 1 \geq 0 \\ 1 + x - 1, & x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2 - x, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$$



3) $y = a$ −прямая параллельная оси абсцисс, она будет иметь с графиком ровно две общие точки при $0 < a < 1$ и $a < -1$

Ответ: $0 < a < 1$ и $a < -1$

№3) Постройте график функции $y = \frac{1-2x}{2x^2-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение:

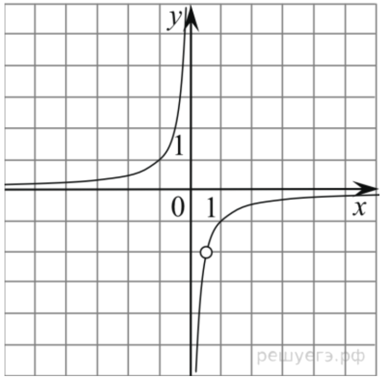
1)$y = \frac{1-2x}{2x^2-x} = -\frac{1-2x}{x(1-2x)} = -\frac{1}{x}$ –гипербола расположенная во 2 и 4 четвертях.

ОДЗ: $1 - 2x \neq 0$

$-2x \neq -1$

$x \neq 0{,}5$

2)Построим график функции $y = -\frac{1}{x}$, с выколотой точкой $(0{,}5; -2)$



3) прямая $y = kx$ проходит через начало координат и будет иметь с графиком функции ровно одну общую точку только тогда, когда будет проходить через выколотую точку $(0{,}5; -2)$. Подставим координаты этой точки в уравнение прямой и найдём коэффициент k.

$$-2 = 0{,}5k$$

$$k = -4$$

Ответ:-4

№4) Найдите р и постройте график функции $y = x^2 + p$, если известно, что прямая $y = 4x$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение:

1) Т.к. прямая $y = 4x$ и график функции $y = x^2 + p$ имеют только одну общую точку $\Longrightarrow$ $x^2 + p = 4x$

$$x^2 - 4x + p = 0$$

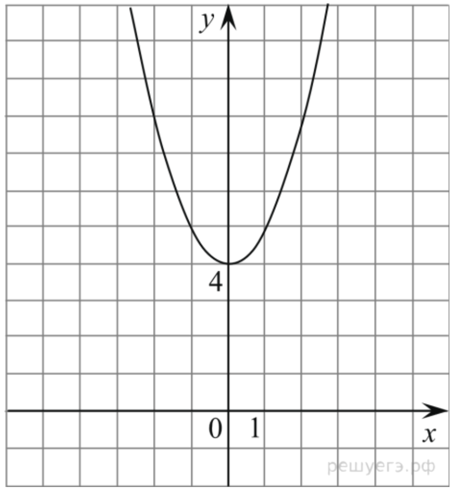
$D = -4^2 - 4p = 0$ (т.к. только одна точка пересечения)

$$16 - 4p = 0$$

$$-4\text{p} = -16$$

$$\text{p} = 4$$

2) Построим график функции $y = x^2 + 4$, это парабола ветви которой направлены вверх, и она смещена на 4 единичных отрезка вверх.



Ответ:4

Используемые источники

1. Алгебра 9 класс: учебник /А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир: под редакцией В.Е. Подольского. – 3-е изд., дораб. – М.:Вентана-граф, 2019.-318, 2 с.: ил. –(Российский учебник). 318 с.

2.Гильманова Р. Г. Функции и их свойства. Графики функций (Подготовка а ОГЭ) Методическое пособие 32 с.

3.Гущин Д.Д. Образовательный портал РЕШУ ЕГЭ и СДАМ ГИА. [Электронный ресурс] URL: https://oge.sdamgia.ru/ (дата обращения: 02.01.2021)

4. Подготовка к ОГЭ. Справочные материалы для учащихся 9 класса.